

# MODELACIÓN MATEMÁTICA DEL CRECIMIENTO DE LA ALTURA MEDIA DE *PINUS CUBENSIS* GRISEB EN LA EMPRESA FORESTAL INTEGRAL BARACOA

## MATHEMATICAL MODELLING OF THE MEAN HEIGHT GROWING OF *PINUS CUBENSIS* GRISEB AT THE INTEGRAL FOREST ENTERPRISE BARACOA

LIC. LOURDES RODRÍGUEZ-SHADE,<sup>1</sup> DR. C. JOSÉ A. BRAVO-IGLESIAS,<sup>2</sup> ING. JUAN M. MONTALVO-GUERRERO,<sup>2</sup>  
DRA. C. VERENA TORRES-CÁRDENAS,<sup>1</sup> ING. WILMER TOIRAC-ARGÜELLES,<sup>3</sup> ESP. VÍCTOR M. FUENTES-UTRÍA<sup>3</sup> E ING.  
PEDRO RODRÍGUEZ-CUEVAS<sup>4</sup>

<sup>1</sup> Instituto de Ciencia Animal. Km 47<sup>1/2</sup>, San José de Las Lajas, Mayabeque, Cuba,  
lrodriguez@ica.co.cu

<sup>2</sup> Instituto de Investigaciones Agro-Forestales. Calle 174 no. 1723 e/ 17B y 17C, Siboney, Playa,  
La Habana

<sup>3</sup> Unidad de Ciencia y Técnica de Base Agro-Forestal Baracoa. Carretera Central. Paso de Cuba,  
Baracoa, Guantánamo, Cuba

<sup>4</sup> Empresa Forestal Integral Baracoa. Bohorque 126, Carretera a Guantánamo, Baracoa,  
Guantánamo, Cuba

### RESUMEN

La modelación matemática constituye una herramienta muy útil para la planificación y gestión de los ecosistemas forestales. Con el objetivo de estimar el comportamiento de la altura media de *Pinus cubensis* Griseb, de la Empresa Forestal Integral Baracoa, se evaluaron ocho modelos de regresión no lineal, donde el modelo que mejor explicó el comportamiento de la especie fue el Gompertz, con un coeficiente de determinación del 80,1 % y parámetros de alta significación ( $p < 0,001$ ). Se presentan las curvas que describen la evolución en el tiempo del incremento medio anual (IMA) y el incremento corriente anual (ICA) de dicha variable, mostrando que estos se igualan a la edad de 12,5 años con una tasa de crecimiento de 0,78 m/año.

Palabras claves: Modelos, altura, *Pinus cubensis*

### ABSTRACT

Mathematical modelling constitutes a very useful tool for the planning and administration of the forest ecosystems. With the objective of predicting the behavior of the mean height in plantations of *Pinus cubensis* Griseb of the Integral Forest Enterprise Baracoa, eight models non-linear regression were evaluated. The model of the best goodness of fit for the mean height was that of Gompertz, being able to explain high variability, with a coefficient of determination of 80,1 %, parameters of high significance ( $P < 0.001$ ). The curves that describe the evolution in time of the annual mean increment (IMA), and the annual periodical increment (ICA) of this variable are provided.

Key words: Models, height, *Pinus cubensis*.

### INTRODUCCIÓN

*Pinus cubensis* Griseb, dentro de las especies de pinos de Cuba, es considerada de gran importancia económica, constituyendo una de las principales materias primas en la zona norte oriental del país.

Los bosques o plantaciones usualmente son manejados para obtener un rendimiento sostenido

de productos, requiriendo un nivel de producción constante para una intensidad de manejo particular, lo cual implica que el crecimiento del bosque o plantación debe ser estimado y balanceado con la cosecha [Ramírez y Zepeda, 1994].

La modelación matemática aplicada al estudio de crecimiento y rendimiento de los bosques

constituye una herramienta de gran valor para estimar la edad a la que se deben efectuar los diferentes manejos silvícolas que garanticen su explotación racional y sostenible.

El objetivo de este trabajo fue modelar el crecimiento de la altura media de *Pinus cubensis* Griseb en la Empresa Forestal Integral Baracoa.

## MATERIALES Y MÉTODOS

Las áreas de estudio se encuentran ubicadas en las unidades silvícolas Baracoa, Cayo Güin y Combate de Sabanilla, pertenecientes a la Empresa Forestal Integral Baracoa. La temperatura media anual reportada es de 26,8 °C, el mes más frío es febrero (24,7 °C) y los más calientes julio y agosto (28,6 °C), la precipitación media anual es 1174,3 mm y la humedad relativa promedio del 80 %. Los suelos predominantes son ferrítico púrpura, ferralítico rojo, ferralítico amarillento, fersialítico rojo parduzco, fersialítico pardo rojizo, pardo sin carbonato y esquelético [Rodríguez et al., 2008].

Se evaluaron ocho modelos reportados por Prodan et al. (1997) y Kiviste et al. (2002).

Hossfeld I 
$$y = \frac{t^2}{(a + bt + ct^2)}$$

Strand 
$$y = \left[ \frac{t}{a + bt} \right]^3$$

Yoschida I 
$$y = \frac{t^c}{a + bt^c} - d$$

Terazaki 
$$y = e^{a - \frac{b}{t}}$$

Hossfeld I (Modificado) 
$$y = \frac{t^2}{(a + bt)^2}$$

Gompertz 
$$y = ae^{-be^{-at}}$$

Logístico 
$$y = \frac{a}{(1 + be^{-at})}$$

Hossfeld II 
$$y = \frac{t(a + bt^2)}{(c + t^3)}$$

donde:

*a, b, c, d*: Parámetros a estimar

*t*: Tiempo o edad de los rodales

Para la selección de los modelos de mejor ajuste se usaron los criterios de Guerra et al. (2003), Kiviste et al. (2002) y Torres y Ortiz (2005):

- *Coficiente de determinación (R<sup>2</sup>)*: declara qué por ciento de la variación de la variable dependiente es explicada por las variables predictoras.
- *Coficiente de determinación ajustado (R<sup>2</sup>a-just)*: es una corrección o ajuste del coeficiente de determinación por el tamaño de muestra *n* como el número de parámetros del modelo.
- *Sesgo*: promedio de la desviación del modelo con respecto a los valores observados.
- *Error medio cuadrático (CME)*: analiza la precisión de las estimaciones.
- *Error medio en valor absoluto (EMA)*: da una idea de la magnitud media de los errores independientemente de su signo.
- *Análisis gráfico de los residuos*: comportamiento de los residuos obtenidos de la diferencia entre los valores observados y los valores predichos por el modelo.

Para el ajuste de los modelos se utilizaron datos de 291 parcelas de 0,05 ha. Se empleó un nivel de significación del 5 % para el análisis de varianza de las regresiones, utilizándose los programas estadísticos Statgraphics Plus versión 5.1 (1995) e InfoStat (2008).

Se obtuvieron las curvas de evolución en el tiempo del incremento corriente anual (ICA) e incremento medio anual (IMA) del modelo de mejor ajuste.

## RESULTADOS Y DISCUSIÓN

En la *Tabla 1* se muestran los criterios estadísticos de bondad de ajuste de los modelos utilizados en la estimación de la altura media de *Pinus cubensis* Griseb.

De forma general, con excepción del sesgo y la significación de los parámetros, todos los modelos evaluados presentaron valores muy similares en cuanto al coeficiente de determinación, coeficiente de determinación ajustado, cuadrado medio del error y error medio absoluto, por lo que pudiera pensarse que todos son adecuados para estimar el comportamiento de la especie.

**TABLA 1**

**Estadísticos de ajuste y estimaciones de los parámetros de los modelos para la altura media de *Pinus cubensis* Griseb.**

Modelo	R <sup>2</sup>	R <sup>2</sup> aj	Sesgo	CME	EMA	a	b	c	D
Hossfeld I	79,6	79,5	0,05548	6,21	2,00	0,70 ± 1,39***	-0,04 ± 0,16 NS	0,05 ± 0,004***	-
Strand	78,8	78,7	-0,02453	6,45	2,07	1,60 ± 0,08***	0,34 ± 0,003***	-	-
Yoschida I	80,2	79,9	-0,00009	6,07	1,96	184,00 ± 293,75 NS	0,07 ± 0,07***	3,03 ± 0,56***	-3,02 ± 0,70***
Terazaki	79,0	78,9	0,03314	6,38	2,06	3,15 ± 0,03***	10,49 ± 0,48***	-	-
Hossfeld I modificado	78,4	78,3	-0,05376	6,56	2,09	1,60 ± 0,08***	0,19 ± 0,003***	-	-
Gompertz	80,1	80,0	0,01035	6,05	1,96	17,44 ± 0,44***	3,30 ± 0,30***	0,14 ± 0,01***	-
Logístico	80,3	80,2	0,00225	5,98	1,94	16,91 ± 0,35***	10,04 ± 1,42***	0,20 ± 0,01***	-
Hossfeld II	80,3	80,2	-0,00010	5,99	1,95	6549,33 ± 4223,69 NS	15,36 ± 1,31***	9868,46 ± 5478,84 NS	-

\*\*\* p < 0,001

\*\* p < 0,01

\* p < 0,05

NS-P > 0,05

Haciendo una valoración integral de todos los criterios, se puede observar que los modelos Logístico, Hossfeld II, Yoschida I y Gompertz fueron los que presentaron los mejores resultados, siendo este último el que mostró un comportamiento lógico en la descripción del incremento corriente anual (ICA) e incremento medio anual (IMA), explicando un 80,1 % de la variabilidad con todos los parámetros altamente significativos ( $p < 0,001$ ) y resultados adecuados en el resto de los criterios evaluados.

La Fig. 1 muestra el ajuste del modelo Gompertz a los datos observados en la altura media, percibiéndose su agrupamiento a las diferentes edades. Estos resultados difieren de los obtenidos por Calvillo *et al.* (2003) y Rodríguez *et al.* (2009), donde el modelo Richards-Chapman fue el más apropiado para describir el crecimiento en altura de *Pinus herrerae* Mart. y el modelo Hossfeld I (modificado) para *Pinus maestrensis* Bisse.

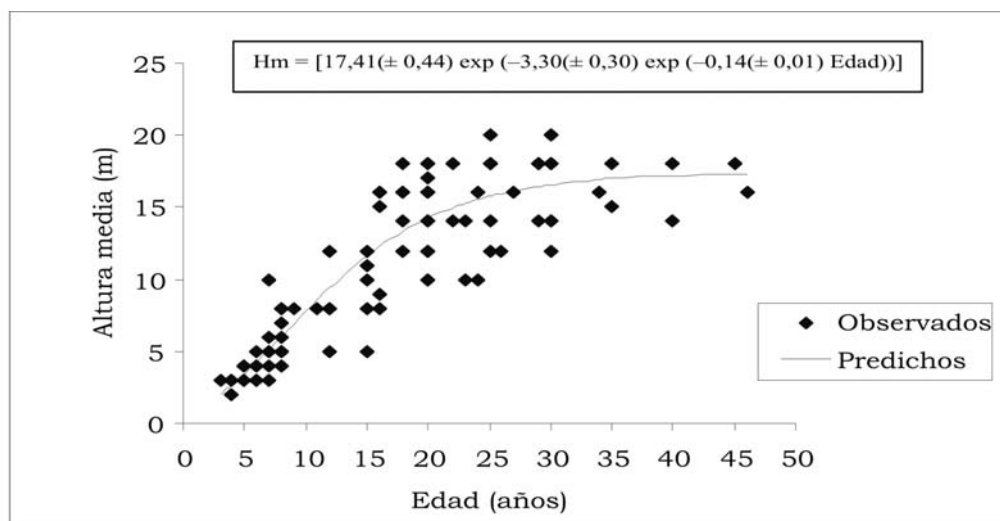


Figura 1. Modelo Gompertz ajustado a la altura media.

Otro de los criterios que garantiza la validez de las estimaciones realizadas por el modelo es el análisis gráfico de los residuos. En la Fig. 2 se observa

que estos distribuyen de forma aleatoria, lo que cumple el supuesto teórico de independencia de los errores [Gujarati, 1997].

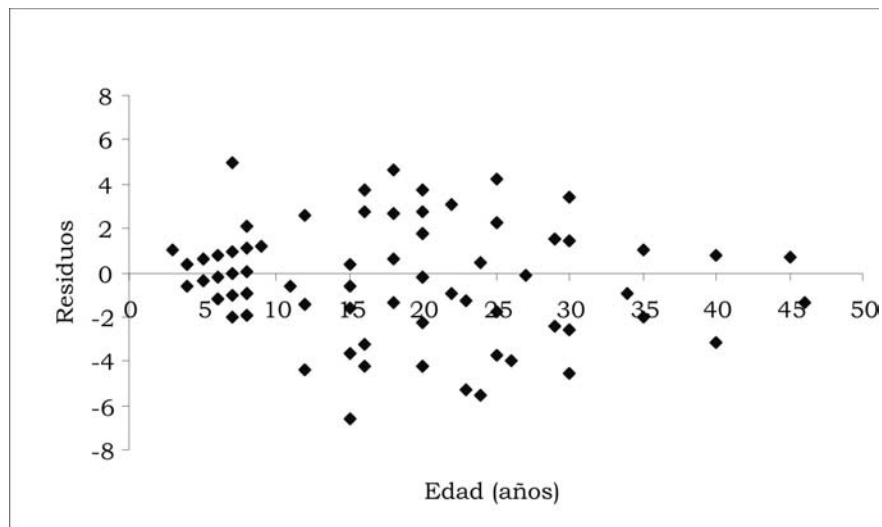


Figura 2. Distribución de los residuos del modelo Gompertz.

La Fig. 3 muestra la evolución en el tiempo del incremento medio anual (IMA) y del incremento corriente anual (ICA). Se observa en las primeras edades un rápido crecimiento hasta los 8,5 años de edad, donde se alcanza la máxima velocidad de crecimiento. A partir de ese momento el crecimiento comienza a des-

cender hasta los 12,5 años, donde se igualan el ICA y el IMA, con una tasa de crecimiento de 0,78 m/año, lo que indica el potencial de la especie hasta esa edad, haciéndose necesario valorar la realización de intervenciones silviculturales. Alrededor de los cuarenta años de edad el crecimiento tiende a estabilizarse.

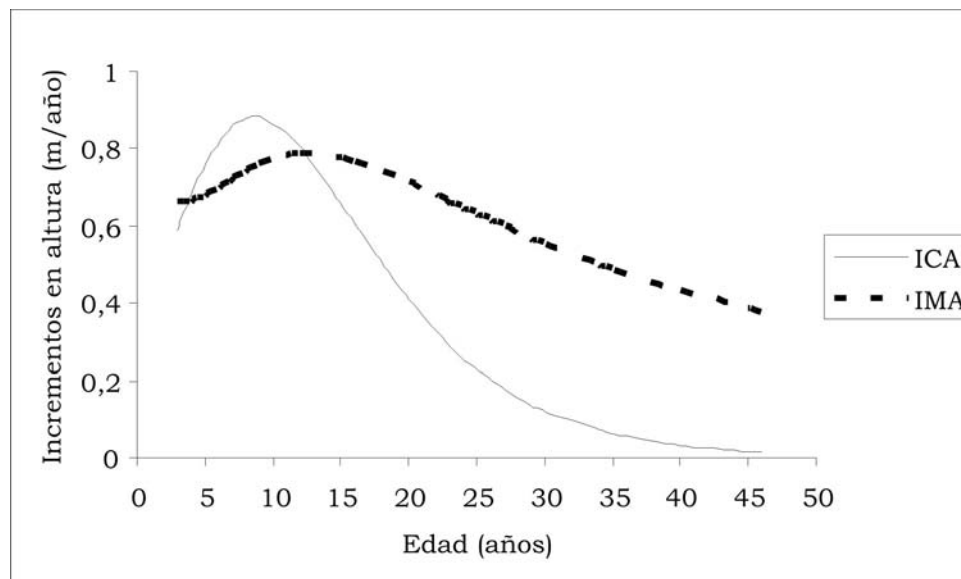


Figura 3. Incrementos en diámetro ajustados por el modelo Gompertz.

## CONCLUSIONES

- El modelo Gompertz presentó estadísticos adecuados para la modelación del crecimiento de la altura media de *Pinus cubensis* Griseb.
- La curva del ICA muestra que la especie tiene un crecimiento ascendente en altura media hasta los 8,5 años, momento cuando se alcanza la máxima velocidad de crecimiento.
- El incremento corriente anual e incremento medio anual se igualan aproximadamente a los 12,5 años, con una tasa de crecimiento de 0,78 m/año.

## BIBLIOGRAFÍA

- CALVILLO, J. C. ET AL. 2003. «Crecimiento en altura y diámetro de árboles de *Pinus herrerae*, Hidalgo, Michoacán». <http://www.uaaan.mx/> (Consultado: 4 de febrero de 2009).
- GUERRA, C. W.; CABRERA, A.; FERNÁNDEZ, L. 2003. «Criterios para la selección de modelos estadísticos en la investigación científica». *Revista Cubana de Ciencia Agrícola* (CU) 37(1). p. 3.
- GUJARATI, D. N. 1997. *Econometría*. Tercera Edición. pp. 54-335.
- InfoStat 2008. InfoStat, versión 2008. Universidad Nacional de Córdoba. Argentina.
- KIVISTE, A. ET AL. 2002. *Funciones de crecimiento de aplicación en el ámbito forestal*. Madrid. Ministerio de Ciencia y Tecnología. Instituto de Investigaciones y Tecnología Agraria y Alimentaria. 190 pp.
- PRODAN, M. ET AL. 1997. *Mensura forestal. Proyecto IICA BMZ / GTZ, sobre Agricultura, Recursos Naturales y Desarrollo Sostenible*. San José. Costa Rica. Editorial IICA. 561 pp.
- RAMÍREZ M. H.; ZEPEDA, M. B. 1994. «Rendimientos maderables de especies forestales; actualidades en México». En IV Reunión Nacional de Plantaciones Forestales. SF y de FS/INI-FAP. México, D.F. s/p.
- RODRIGUEZ, P. E. ET AL. 2008. «Proyecto de organización y desarrollo de la economía forestal 2008-2017». Ministerio de la Agricultura. Grupo Empresarial de la Agricultura de Montaña. Empresa Forestal Integra Baracoa. 57 pp.
- RODRÍGUEZ, L.; TORRES, V.; MORENA, O. 2009. CD IV Encuentro Internacional por el Desarrollo Forestal Sostenible. DEFORS 2009.. Localizar en comisión: Silvicultura Sostenible. 15. Publicación electrónica.
- Software estadístico Statgraphics Plus versión 5.1 sobre Windows, 1995.
- TORRES, V.; ORTIZ, J. 2005. «Aplicaciones de la modelación y simulación en la producción y alimentación de animales de granja». *Revista Cubana de Ciencia Agrícola* (CU) 39. Número especial. pp. 397-405.

## RESEÑA CURRICULAR

Autor principal: Lourdes Rodríguez Shade

Licenciada en Contabilidad y Finanzas, especialista del Departamento de Biomatemática del Instituto de Ciencia Animal, se encuentra en el Programa de Doctorado Curricular en Biometría. Obtuvo premio en el Forum Tecnológico sobre el cambio climático en la actividad agraria. Ha participado en eventos nacionales e internacionales con resultados relevantes.