

MODELO MATEMÁTICO DEL TERRENO. APLICACIONES FORESTALES

DR. IGNACIO ESTÉVEZ VALDÉS,¹ DR. ÁNGEL NOTARIO DE LA TORRE,¹
DR. DANIEL ÁLVAREZ LAZO¹ Y DR. PEDRO FERNÁNDEZ DE CÓRDOBA²

¹ Universidad de Pinar del Río. Calle Martí 270 Final, CP 20100,
Pinar del Río, Cuba, c.e.: iestevez@mat.upr.edu.cu

² Universidad Politécnica de Valencia, España

RESUMEN

En esta investigación se confeccionaron tres modelos digitales del terreno (MDT) evaluados en relieve llano, ondulado y montañoso, arribándose a conclusiones relacionadas con la calidad de los resultados cuantitativos que se alcanzan en cada modelo. El primer MDT, al igual que los demás, fue definido sobre una red regular de cotas, relativa a un relieve determinado. Emplea como herramienta matemática para la interpolación un polinomio bilineal. Este es un caso particular de los polinomios de interpolación de Lagrange de dos variables, del que se derivan las ecuaciones usadas en los restantes modelos, polinomios bicuadrático y bicúbico.

En todos los casos existe la posibilidad de redensificar la matriz de cotas sobre la que se definen estos tres modelos, a partir de la interpolación en las secciones transversales con spline cúbico natural, lo que aumenta la posibilidad en exactitud. Estos modelos poseen gran valor en el campo de la ingeniería forestal, pues permitirán la automatización de aplicaciones como el dibujo de perfiles, la creación de mapas de curvas de nivel, la determinación de la altura del arbolado y la caracterización de la pendiente en un relieve dado.

Se creó además la posibilidad de diseñar el eje de un vial a mano alzada directamente en el display de la computadora sobre una plantilla de isocotas, teniendo en cuenta las normas técnicas exigidas para su construcción, con la alternativa de ofrecer al usuario las coordenadas de las estaciones cada 20 m, aspecto de notable importancia para su diseño y replanteo.

ABSTRACT

In the current research three Digital Terrain Models (DTMs) were made and evaluated in flat, undulated, and mountainous relief, reaching conclusions related to the quality of the quantitative results attained in each model. The first DTM, as well as the others, was defined upon a regular network, relative to a determined relief. It is used as a mathematical tool for the interpolation of a bilinear polynomial; this is a particular case of Lagrange's two-variable interpolation polynomials which the equations used in the biquadratic and bicubic models are derived from.

In all the cases there is the possibility to redensify the data matrix upon which these three models are defined, starting from the interpolation in transversal sections with a natural cubic spline, what increases the possibility in exactness. These models are highly valuable in the field of forestal engineering, since they will allow the automation of applications such as profiles drawing, contour lines maps creation, the determination of the woodland height, and the characterization of the gradient in a given relief, among others.

Besides, the possibility to design a road axis by free hand directly in the computer display was created, taking into account the technical standards demanded for its construction, with the alternative to offer the user the coordinates of the stations every 20 m, an aspect of key importance for its design and layout on the ground.

En general, todas las soluciones computarizadas soportadas sobre Matlab, versión 5.1.0.421 de 1997, conforman un sistema de programas para contribuir al aprovechamiento sostenible del bosque y a la conservación del medio ambiente, facilitando además la posibilidad de analizar alternativas de soluciones ingenieriles.

Palabras clave: modelación, digital, terreno, spling, interpolación

In general, all the computerized solutions based on the 1997 Matlab, version 5.1.0.421, conform a system of programs which contribute to the sustained profit of the forest and to the environmental conservation, also facilitating the possibility to analyze alternatives for engineering solutions.

Key words: modelling, digital, terrain, spling, interpolación

INTRODUCCIÓN

La necesidad de respuestas cada vez más rápidas y precisas en el campo de la ingeniería, y la necesidad de abaratar los trabajos ingenieros y disminuir los impactos negativos del hombre sobre el medio, hacen cada vez más posible que la matemática numérica en conjunción con los ordenadores que hoy existen jueguen un papel muy importante e insustituible en el proyecto de cualquier obra; sin embargo, los procedimientos de cálculos tradicionales continúan siendo usados, tal vez por su simplicidad. El problema principal por resolver en esta investigación puede formularse como necesidad de automatizar la determinación de cotas para elevar la eficiencia y la eficacia, en las aplicaciones forestales que dependen de esta variable. El objeto de la investigación es la modelación matemática de superficies, y su campo de acción se precisa en el empleo de polinomios de interpolación de Lagrange de dos variables para ese fin, con vistas a sus aplicaciones forestales a partir de una base de datos obtenidos de un mapa topográfico.

En consecuencia se ha centrado la atención en elaborar modelos digitales

del terreno sobre redes rectangulares, susceptibles a redensificar, con el empleo para ello de las funciones spline cúbico de una variable y la interpolación segmentaria usando los polinomios de Lagrange de dos variables: bilineal, bicuadrático y bicúbico, y su evaluación para tipos de terreno llano, ondulado y montañoso, así como diseñar aplicaciones forestales vinculadas con el diseño de caminos, determinación de altura del arbolado y análisis de características del terreno, coincidiendo en este sentido con los trabajos realizados por Domínguez (2003).

MATERIALES Y MÉTODOS

Modelo digital del terreno usando polinomios de Lagrange

Parece justo que el uso del MDT sea una vía adecuada para resolver el problema planteado, por lo que en este trabajo se construye un MDT usando polinomios de interpolación de dos variables, llamados polinomios de Lagrange, teniendo en cuenta la interpolación segmentaria y las redes rectangulares regulares para definir nuestro modelo, coincidiendo

do con los trabajos desarrollados por Moukoro (1992), Tchikoue *et al.* (1992), Tchikoue (1996) y Estévez (1998).

De cada uno de los polinomios usados se derivan dos casos. El primero se trata de las funciones de interpolación definidas sobre la red rectangular regular obtenida directamente del relieve, y el segundo es definido sobre la red rectangular regular redensificada con el uso de funciones *spline* cúbico natural. Es importante señalar que la matriz rectangular es la estructura más utilizada para construir los MDT debido a su cómodo manejo informático y simplicidad estructural.

El método que ha de seguirse para la redensificación de la red rectangular regular, obtenida del relieve de interés, consiste en interpolar con funciones *spline* cúbico natural todos los perfiles. Veamos el procedimiento.

En primer lugar consideremos como variable independiente la x , teniendo los puntos de interpolación la forma $(j, f_{\theta j})$; $(i = 0, 1, 2, \dots, m-1, m)$ y $j = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$. Posteriormente se evalúan las funciones *spline* obtenidas en cada perfil en puntos $(j, f_{\theta j})$; $(j = 0; 0,1; 0,2, \dots, 10(n-1), 10n)$ e $i = 0, 1, 2, \dots, m-1, m$. Seguidamente se hace lo mismo; pero considerando como variable independiente la y , tomando ahora como puntos de interpolación $(i, f_{\theta i})$; $(i = 0, 1, 2, \dots, m-1, m)$ y $j = 0; 0,1; 0,2, \dots, 10(n-1), 10n$. Si ahora procedemos a interpolar en las $10n$ funciones *spline* cúbico natural, los puntos $(i, f_{\theta i})$; $(i = 0,1; 0,2; 0,3, \dots, 10(m-1), 10m)$ resultará una matriz del tipo $[(m+1) \times (n+1)]$; que es la matriz redensificada. El proce-

so de redensificación descrito se efectúa con un programa en Matlab, con la opción de hacer la redensificación tan densa como se desee. En este caso se decidió hacerla cada 0,1 mm.

MDT usando polinomio bilineal

Como se comentó, el dominio de definición para las funciones de interpolación usadas en nuestros modelos son redes o mallas rectangulares regulares de las que conocemos las coordenadas espaciales de todos sus nodos (i, j) con $(i = 0, 1, 2, 3, \dots, (m-1), m)$ y $j = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1), n$.

Estas coordenadas en todos los casos se tomaron de un mapa topográfico escala 1/10 000 y con curvas de nivel a intervalos de 5 m, haciendo la lectura de las coordenadas sobre el mapa topográfico cada 50 m, o sea, 0,5 cm, lo que significa que en un kilómetro cuadrado se obtienen 400 nodos. También todos los modelos fueron evaluados en tres tipos de relieve: llano, ondulado y montañoso, para hacer una evaluación de su comportamiento en cada caso.

En el modelo bilineal los subconjuntos tomados para la interpolación segmentaria son cuadrículas de cuatro nodos, por lo que al interpolar con el polinomio de Lagrange las ecuaciones obtenidas sobre cada subconjunto son funciones bilineales de la forma:

$$Z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$$

Una superficie plana interceptada con cualquier otro plano siempre resultará una recta Lehmann (1970); sin embargo, la superficie bilineal no

siempre se comporta así. Hay casos que al interceptarlas con algún tipo de planos resulta una curva correspondiente a una parábola. Este pequeño detalle lo marca una diferencia entre un plano y una superficie bilineal en cuanto a su comportamiento. Se expone el siguiente ejemplo:

Si se interceptan las ecuaciones $Z(x,y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy$ y el plano $y = x$ resulta la curva, $Z(x) = a_0 + a_1x + a_2x + a_3x^2$, lo que precisamente es una parábola.

Como se ha comentado, el MDT que usa como función de interpolación el polinomio bilineal se define sobre una matriz tomada del relieve de orden (m, n) y otra matriz que es la redensificada de orden $(10m+1, 10n+1)$. En los dos casos se puede calcular con rapidez la cota de algún punto que se encuentre en el dominio de definición de interpolación. También es posible representar la superficie en estudio en tres dimensiones y hacer una plantilla de isocotas (curvas de nivel). La redensificación se hace con el objetivo de suavizar tanto el relieve como las isocotas, lo que puede implicar una mejor precisión.

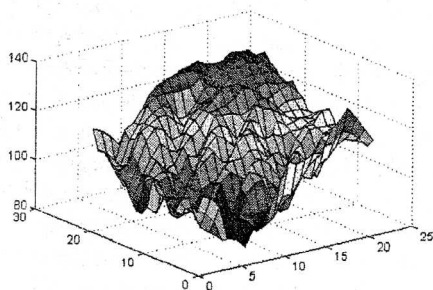


Fig. 1. Relieve montañoso sin redensificar.

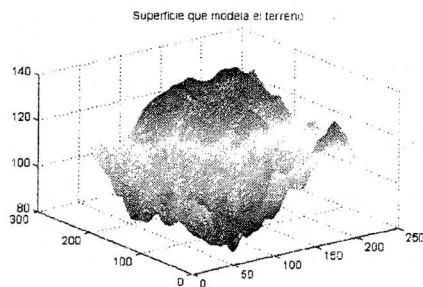


Fig. 2. Relieve montañoso matriz redensificada.

MDT usando polinomio bicuadrático

Para el modelo bicuadrático los subconjuntos tomados para la interpolación segmentaria son cuadrículas de nueve nodos, por lo

que al interpolar con el polinomio de Lagrange las ecuaciones obtenidas sobre cada subconjunto son funciones bicuadráticas de la forma

$$Z(x, y) = a_0 + a_1x + a_2y + a_3xy + a_4x^2 + a_5y^2 + a_6yx^2 + a_7xy^2 + a_8x^2y^2$$

Es importante resaltar que esta superficie, al interceptarse con los planos paralelos a los planos coordenados, resul-

tan curvas parabólicas, no como el caso de los planos y los polinomios bilineales, que su intersección son rectas.

MDT usando polinomio bicúbico

Para el modelo, empleando funciones bicúbicas, se tomaron cuadrículas de 16 nodos para la interpolación segmentaria, por lo que al interpolar

con el polinomio de Lagrange, las ecuaciones obtenidas sobre cada subconjunto, son funciones bicúbicas de la forma

$$Z(x,y)=a_0+a_1x+a_2y+a_3xy+a_4x^2+a_5y^2+a_6yx^2+a_7xy^2+a_8x^2y^2+a_9x^3+a_{10}y^3+ \\ +a_{11}xy^3+a_{12}y^3x+a_{13}x^2y^3+a_{14}y^2x^3+a_{15}x^3y^3$$

Esta superficie, al interceptarse con los planos paralelos a los planos coordenados, origina un polinomio cúbico, propiedad que pudiera favorecer el adaptarse con más facilidad con algún tipo de relieve.

El cálculo de cotas utilizando los modelos propuestos en algunas aplicaciones forestales

En esta investigación el cálculo de cotas a través de los MDT es de suma importancia, por el papel que esto juega en las distintas aplicaciones que pueda tener el MDT coincidiendo con Notario (1988), Jiménez (1990) Tchikoue *et al.* (1990) y García (1994), aunque se emplean las salidas gráficas tanto en el plano como en el espacio, funciones de interpolación de una variable, Volkov (1992) y algunas técnicas del cálculo diferencial juegan su papel, sin duda el obtener las cotas mediante la interpolación es lo fundamental en las aplicaciones usadas. Es importante señalar que en las aplicaciones tratadas no se pretende llegar al final, sino hacer un esbozo, lo que significa que en este trabajo se dará mediante una herramienta matemática y soportado por un conjunto de programas una serie de alternativas de uso para los especialistas

con vistas a facilitar algunas actividades importantes dentro del contexto forestal, aspecto que ha sido tratado por Egas *et al.* (2001) y Álvarez *et al.* (2003) al hacer referencias a cuestiones relacionadas con el aprovechamiento de la madera.

Parte del objetivo por lograr en esta investigación consiste en calcular la altura del arbolado por su importancia para caracterizar la vegetación forestal por la altura del arbolado. Para cumplir con el cálculo de tan importante parámetro, nos valemos de varias técnicas, que con el concurso del ordenador hoy se hace posible utilizar. Entre ellas están el método fotogramétrico y el modelo digital del terreno.

Es importante destacar que las fotos aéreas van a estar involucradas en nuestro propósito. Conocemos lo que se hace de forma usual para lograr la altura de un árbol mediante su empleo. Haciendo mediciones sobre fotos aéreas se puede calcular la altura del arbolado mediante el uso de algún instrumento fotogramétrico, en particular estereorrestituidores. Si se mide la cota de la copa del árbol y se ve alguna porción del terreno que se encuentre cerca de él de manera que se pueda determinar tam-

bién la cota de algún punto sobre esta porción del terreno, basta calcular la diferencia de las cotas para asumirla como altura del árbol, haciéndose el problema más sencillo si el bosque es artificial, de forma tal que los árboles tienen la misma edad de plantación, desarrollo poco diferenciado, y por lo general una visibilidad mayor sobre la superficie terrestre, lo que favorece así el procedimiento comentado.

El problema está en que si el área de interés corresponde a un bosque natural y no se cuenta con fotografías a escalas muy grandes, por lo general en estos casos no se observa el terreno, y los árboles se diferencian en su edad, e inclusive su especie. Este es el caso más complejo. Tomando la posibilidad de usar un estereorrestituidor fotogramétrico, y poder determinar la cota y coordenadas planimétricas de la copa de un árbol con el empleo de un MDT, se puede determinar la cota del pie del árbol evaluando las coordenadas planimétricas de la copa en el MDT, y así por diferencia de las cotas obtenidas por medición y por interpolación tener la altura, sin que el técnico observe la superficie terrestre. Esto se hace en una muestra representativa del área, para más tarde con un tratamiento estadístico determinar la altura del arbolado en el área en cuestión mediante procedimientos habituales del inventario forestal.

Procedimiento propuesto para el trazado en planta del eje de un vial

Atendiendo a los requerimientos de las actividades forestales en cuanto a la elección del eje para las vías de

transporte terrestre, se propone el trazado a mano alzada en el que el proyectista elige y traza un conjunto de puntos del eje deseado, marcándolos con el *mouse* sobre una plantilla de isocotas representada en el videoterminal. Ese eje, que posee la cualidad de ser continuo en segunda y primera derivada en todo el dominio en que está definido, ofrece una suavidad en toda su trayectoria. La computadora se encarga de calcular las coordenadas planimétricas (x , y) de las estaciones cada 20 m y sus radios de curvatura. Se brinda además la opción de evaluar el eje diseñado sobre una plantilla de isopendientes, dando la posibilidad de rediseñar con rapidez y corregir alguna violación de los parámetros técnicos exigidos.

El eje del vial trazado a mano alzada sobre la plantilla de isocotas conserva una suavidad en toda su trayectoria. Esto responde a la continuidad en primera y segunda derivada impuesta a la función usada, que no es más que una función *spline* paramétrico cúbico.

Se hace necesario comentar cómo se le dio solución desde el punto de vista matemático al cálculo de las coordenadas de los puntos equidistantes a 20 m y al radio de curvatura.

En el primer caso se empleó una interpretación geométrica muy sencilla de la integral definida, el cálculo de la longitud de un arco de curva plana dada por su ecuación vectorial [Kudriásev, 1983]

$$L_c = \int_a^b \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt$$

Parece razonable aceptar que el problema por resolver nos conduciría sin remedios a la solución de una ecuación integral del tipo

$$\int_a^x \sqrt{(\alpha'(t))^2 + (\beta'(t))^2} dt - 20 = 0$$

El cálculo para obtener la solución se debe comenzar a partir del origen de la curva paramétrica. La primera ecuación corresponderá a la primera distancia igual a 20 m, y de forma recurrente se originarán tantas ecuaciones por resolver como tramos de esta longitud se obtenga sobre la curva. Al obtener el valor de la incógnita x es claro que sustituyendo en $\alpha_{(t)}$ y $\beta_{(t)}$ se obtiene las coordenadas (x, y) del punto a 20 m. Para resolver la integral se empleó el método de Simpson, y para la ecuación el de bisección, ambos métodos numéricos muy sencillos de programar en MATLAB [Jiménez, 1999].

Para calcular el radio de curvatura se usó una fórmula que permite determinar la curvatura de una función dada en forma paramétrica, donde la curvatura va a ser el recíproco del radio, o sea, a mayor radio menor curvatura y viceversa; en caso contrario [Kudriásev, 1983]:

$$K = \frac{1}{R} = \frac{|x'y'' - x''y'|}{((x')^2 + (y'')^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Después de haber terminado el diseño en planta del eje del vial, se puede dibujar el perfil de ese eje evaluando en el MDT, conveniente, las coordenadas (x, y) de las estaciones a 20 m. Para esto empleamos una función de interpolación segmentaria *spline* cúbico natural, función

que garantiza la continuidad en primera y segunda derivadas, lo que origina una suavidad en todo el dominio sobre el que se definirá. Nuestro interés de utilizar el *spline* consiste en usar funciones interpoladoras lo menos curvadas posible.

Procedimiento para evaluar la pendiente en un relieve dado

Como factor de interés en la ordenación y aprovechamiento del bosque, se encuentra el poder disponer de información relativa al comportamiento de la pendiente del relieve, por lo que en esta investigación se elaboró un modelo que nos posibilitará determinar la pendiente máxima de forma puntual y su evaluación a través de una plantilla de isopendientes. En primer lugar explicaremos qué definimos como *pendiente máxima puntual*.

Sabemos que el dominio sobre el que definimos nuestros MDT son mallas rectangulares y regulares. De estas mallas conocemos las coordenadas (x, y, z) correspondientes a sus nodos. Mediante la derivada direccional aproximada

$$\approx \frac{f(i+h, j+h) - f(i, j)}{\sqrt{h^2 + h^2}}$$

se puede calcular la pendiente máxima de cada uno de esos nodos y en todas las direcciones posibles en su vecindad, considerando como máxima pendiente la derivada direccional de mayor valor absoluto. A este valor es lo que llamamos *pendiente máxima puntual*. Mediante un programa se puede tener la pendiente máxima de cualquier punto de la red.

Conociendo todas las pendientes máximas en todos los nodos de la red se puede obtener una plantilla de isopendientes en la que el técnico puede hacer valoraciones de las operaciones de aprovechamiento forestal en función de la pendiente del terreno. Sobre esta plantilla es posible diseñar también, al igual que en la plantilla de isocotas, el eje del vial atendiendo a las normas técnicas en función del parámetro pendiente.

RESULTADOS

Los MDT se evaluaron en los tres tipos de relieve y en cada uno de ellos se analizaron los errores cometidos contra una base de datos (30 puntos).

Estos son puntos aislados que aparecen en los mapas con sus cotas registradas; se complementaron con algunos que se tomaron sobre las curvas de nivel.

Con la finalidad de conocer si existe diferencia entre los modelos por usar para las condiciones en las que se trabajó para los diferentes tipos de terreno, se efectuó la prueba no paramétrica Kruskal-Wallis (H), después de haber comprobado mediante la prueba Kolmogorov-Smirnov Siegel, con un nivel de significación $\mu = 0,05$, que las variables no seguían una distribución normal, tomando como referencia comparativa los trabajos desarrollados por Cobas (2002) y Cobas *et al.* (2004).

TABLA 1
Resultados de la prueba Kruskal-Wallis

	Z llano	Z ondulado	Z montañoso
H	$H = 0,118$	$H = 0,239$	$H = 0,336$
	$gl = 6$	$gl = 6$	$gl = 6$
	$p = 1,000$ n.s.	$p = 1,000$ n.s.	$p = 0,999$ n.s.

A partir de los resultados de la prueba para cada uno de los terrenos, se infiere que no hay diferencia estadísticamente significativa entre los modelos utilizados, lo que queda demostrado en los valores de probabilidad.

$e_{sd} = Z_1 - Z$: Error absoluto, matriz sin redensificar.

$e_d = Z_2 - Z$: Error absoluto, matriz redensificada.

El error medio de los 30 puntos de control en ambos casos se calcula:

$$e_{sd} = \frac{\sum_{i=1}^{30} e_{sd}}{n} \quad \text{y} \quad e_d = \frac{\sum_{i=1}^{30} e_d}{n}$$

En la siguiente tabla se recogen los resultados de estos errores medios en cada uno de los tipos de relieve y con cada variante de modelo.

TABLA 2
Resultados de los errores medios

Modelo	Terreno					
	Llano		Ondulado		Montañoso	
	No densificada	Rensificada	No densificada	Rensificada	No densificada	Rensificada
Bilineal	1,0587	0,9670	1,8587	2,3997	3,4867	2,5200
Bicuadrático	1,2810	0,8853	1,3977	1,1747	2,1727	2,6017
Bicúbico	0,7870	0,8543	2,5153	1,1747	4,3740	2,6013

Como se puede ver, para 30 puntos de muestreo en el terreno llano el error menor es con el modelo bicúbico sin redensificar. Este modelo, a pesar de depender de ecuaciones bicúbicas, es de buena aproximación, y aunque se podía suponer que el bilineal se ajustara más, no se debe olvidar que la ecuación bilineal es un caso particular de la bicúbica, o sea, un polinomio bicúbico puede ser bilineal e inclusive lineal o constante si los puntos de interpolación están dispuestos de forma que así sea.

En el terreno ondulado la mejor aproximación está en los modelos bicuadrático y bicúbico redensificados, resultado que era de esperar, destacando como cosa curiosa la congruencia de los errores medios en el modelo bicuadrático y bicúbico.

Para el montañoso, el de más precisión resulta el bicuadrático sin densificar, aunque las diferencias entre el bicuadrático y el bicúbico densificados no es notable. Se debe además destacar el hecho del mejoramiento de los resultados cuando se procede en el modelo bicúbico a redensificar la matriz.

CONCLUSIONES

El análisis de los resultados del trabajo investigativo desarrollado y expuesto permitió arribar a las siguientes conclusiones:

- Se evaluaron los MDT construidos en los tres tipos de terreno posible: llano, ondulado y montañoso, llegando a conclusiones cualitativas de cada uno de ellos por tipo de relieve y característica del dominio de definición.
 - En el terreno llano el modelo recomendado es el bicúbico sin densificar.
 - En el terreno ondulado son recomendados los modelos bicuadrático y bicúbico redensificados.
 - En el terreno montañoso son recomendados los modelos bicuadrático sin densificar y el bicúbico redensificado.
- Se brinda un método para el cálculo de la altura del arbolado mediante el empleo de los MDT recomendados por cada tipo de relieve.
- Se logra un sistema automatizado para la realización de las tareas básicas de cálculos y dibujo que permiten un adecuado diálogo proyectista-ordenador en el campo de

- los proyectos viales forestales. Fueron expuestas las soluciones desarrolladas para el trazado a mano alzada del eje de un vial usando funciones *spline* paramétrico, que ha contribuido exitosamente a ofrecer flexibilidad al proyectista para elegir el eje de la vía. Con ello lógicamente deben disminuirse las afectaciones al bosque y facilitar el transporte, manejo y construcción de la vía como consecuencia de búsqueda de la adaptabilidad del trazado al relieve del terreno y a satisfacer los requerimientos propios del trazado forestal.
- d) En el trazado del eje del vial es posible, mediante la solución de ecuaciones integrales, obtener las coordenadas planimétricas de las estaciones sobre el eje cada 20 m y su radio de curvatura, aspectos de vital importancia a la hora del replanteo del vial y las consideraciones de sus normas técnicas.
- e) Se puede obtener una plantilla de isopendientes de manera que el proyectista pueda valorarlas con fines de organización de las actividades del aprovechamiento y la silvicultura.

BIBLIOGRAFÍA

- ÁLVAREZ, D.; I. ESTÉVEZ; P. CHÁVEZ; A. F. EGAS; J. M. GARCÍA: «Análisis matemático para incrementar la eficiencia en los aserraderos», revista *Chapingo*, Serie Ciencias Forestales y del Ambiente, IX-2:187-198, 2003.
- DOMÍNGUEZ, A.: «Impactos ambientales de los caminos forestales». Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias, Universidad de Alicante, España, 2003.
- DOMÍNGUEZ, F.: «Solución de alternativas de aprovechamiento de la madera con impacto reducido mediante técnicas de decisión multicriterio». Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias, Universidad de Alicante, España.
- EGAS, A.; D. ÁLVAREZ; I. ESTÉVEZ: «Factores fundamentales para aumentar el rendimiento volumétrico en los aserraderos de Cuba», revista *Chapingo*, Serie Ciencias Forestales y del Ambiente, vol. VII-2:163-169, 2001.
- ESTÉVEZ, I.: «Una aplicación de métodos numéricos en la ingeniería civil». Tesis para optar por el título de Máster en Matemática Avanzada para Ingeniería, La Habana, 1998.
- GARCÍA, R. S.: «Aplicación de los modelos digitales del terreno en ingeniería civil». Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, 1994.
- JIMÉNEZ, G. S.: «Un modelo digital del terreno para la proyección de carreteras en Cuba». Tesis para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Técnicas, ISPJAE, La Habana, 1990.
- JIMÉNEZ, F.: *Prácticas de métodos matemáticos para la ingeniería I e introducción al Matlab*, Servicio de Publicaciones, Universidad Politécnica de Valencia, España, 1999.
- KUDRIÁVTSEV, L. D.: *Curso de análisis matemático*, t. I, Ed. Mir, Moscú, 1983, pp. 304-308.
- LEHMANN, H. C.: *Geometría analítica*, Edición Revolucionaria, La Habana, 1970.
- MOUKORO, E.: «Un sistema para el diseño de canales abiertos para la conducción y evacuación de agua». Tesis para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Técnicas, ISPJAE, La Habana, 1992.
- NOTARIO, A.: *Investigaciones sobre la planificación general de las redes camineras en los bosques de la República de Cuba con el empleo de métodos de teledetección*. Dresden, Dissertation A (Dr. rer. slv.), 1988.
- TCHIKOUE, H.; A. NOTARIO: «Sistemas de programas para el cálculo automatizado de un trazado a mano alzada a partir de un levantamiento topográfico directo», V Conferencia Científico-Técnica del MICONS-UNAICC, Pinar del Río, 1990.
- TCHIKOUE, H.; I. ESTÉVEZ; G. JIMÉNEZ; A. NOTARIO: «Una contribución al ajuste matemático de los trazados de los caminos forestales a mano alzada», IV Conferencia Científica del CUPR, Pinar del Río, 1992.
- TCHIKOUE, H.: «Trazado de viales forestales mediante la modelación matemática». Tesis para optar por el grado científico de Doctor en Ciencias Forestales, Universidad de Pinar del Río, Cuba, 1996.
- VOLKOV, E. A.: *Métodos numéricos*. Ed. Mir, Moscú, 1992.